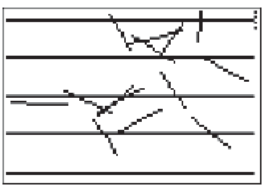
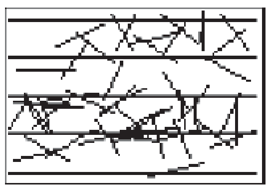
„Gwóźdź” programu lekcji – zadanie Buffona

Dokładniejsze informacje na temat lekcji, zajęć poświęconym zadaniu Buffona można znaleźć w [GP_PZ]. Comte de Buffon, francuski uczony, autor *Histoire naturelle* wydanej w 1777 roku w suplemencie do tego dzieła zamieścił zadanie:

Płaszczyzna pokryta jest prostymi równoległymi, dwie sąsiednie proste są w odległości d. Rzucamy na płaszczyznę igłę o długości l. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie którąś z prostych?

Popatrzmy na symulację tego doświadczenia wykonaną za pomocą programowalnego kalkulatora TI-83 Plus (można użyć emulatora); wykonano 50 rzutów, obliczona częstość wyniosła 0,6.





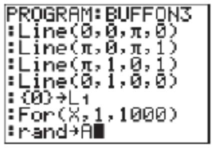
Matematyzacja problemu

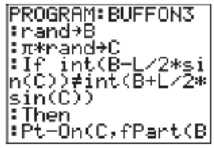
Wystarczy rozpatrywać tylko dwie proste: $y=0$ i $y=1$. Losowo wybieramy współrzędne środka igły i kąt nachylenia igły do poziomu. Odcięta środka igły jest nieistotna. Na początku warto zapytać o zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych (Ω to zbior $[0,\pi]\times[0,1]$, pierwsza współrzędna wskazuje rzędną środka igły, druga to kąt nachylenia igły do poziomu) i o zbiór zdarzeń sprzyjających (na tym etapie trudny do zobaczenia). Intuicyjnie jest jasne, że prawdopodobieństwo to stosunek pola punktów odpowiadających zdarzeniom sprzyjającym do pola zbioru Ω. Losujemy współrzędne środka igły, punkt (x,y) – wartość x jest nieistotna, y określa, na jakiej wysokości znajduje się środek, a następnie kąt nachylenia igły do poziomu, czyli liczbę z przedziału $[0,\pi]$.

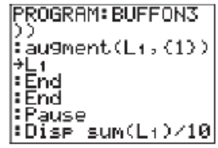
Warunek

$$\left[y-\frac{l}{2}\sin\alpha\right]\neq\left[y+\frac{l}{2}\sin\alpha\right]$$

gdzie $[c]$ oznacza część całkowitą liczby c, określa, czy igła o długości l przecina którąś z prostych $y=0$ i $y=1$. Spojrzmy na fragmenty kodu programu, który wykonuje 1000 prób (rzutów igłą) i zaznacza w zbiorze Ω punkt, jeśli igła przecina którąś z dwóch prostych.





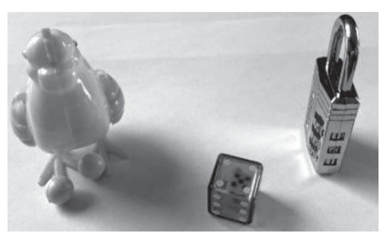


Po uruchomieniu symulacji dla długości igły równej 1 otrzymujemy „wykres" oraz częstość:

Uzasadnienie, że szukane prawdopodobieństwo wynosi $2/\pi = 0{,}6366197724\ldots$ można znaleźć w [GP_PZ].

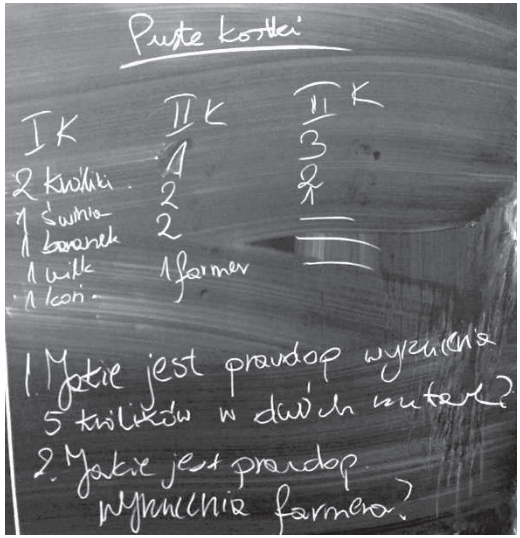
Układanie zadań z gadżetami

Układanie zadań przez uczniów to pomysł, który można (i warto) wykorzystać nie tylko w związku z probabilistyką. Uczniowie stają się twórcami, układają i rozwiązują swoje własne zadania.



Poniżej przedstawiam krótki raport z takich zajęć przeprowadzonych ze studentami. Grupę studentów podzielono na 6 podgrup, z których każda otrzymała swój rekwizyt – gadżet. Cztery rekwizyty nie wymagają opisu: pudełko z zapałkami, trzy kostki sześcienne (ich ściany są puste), kilka kostek dwunastościennych i kilka kostek dwudziestościennych (jedna grupa). Trzy inne podgrupy zajmowały się kostką w kostce, kłódką z szyfrem oraz kurą z jajkami. Te trzy rekwizyty przedstawiono na fotografii obok. Kura znosi jajka w różnych kolorach, w większej kostce znajduje się mniejsza, a kłódkę otwiera trzycyfrowy szyfr wybrany z cyfr od 0 do 9.

Po pracy w podgrupach każda z nich prezentowała swoje zadania, zapisując je na tablicy, i krótko omawiała niektóre z nich (zajęcia trwały 2 godziny lekcyjne). Fotografię jednej z tablic przedstawiono na poniższym zdjęciu.



Wiele pomysłów na lekcję z rachunku prawdopodobieństwa można znaleźć w [Płocki].

Rachunek prawdopodobieństwa – błędy

Przykład 1

Jakie jest prawdopodobieństwo, że Janek, rzucając dwiema monetami, uzyska więcej orłów niż Józek, który rzuca jedną monetą. Obydwaj chłopcy wykonują po jednym rzucie.

Zadanie to znalazło się wśród ośmiu zadań rozwiązywanych przez studentów I, II i III roku; badanie opisano w [Kąkol]. Dane uzyskane w badaniu 122 studentów I roku odzwierciedlają stan wiedzy probabilistycznej uczniów ostatnich klas szkoły ponadpodstawowej. Bardzo zaskakujące były rozwiązania tego zadania w całej grupie badanych studentów z trzech roczników (łącznie przebadano 234 osoby), ponad połowa studentów przedstawiła takie rozwiązanie:

$$\Omega_1 = \{oo, or, ro, rr\} \qquad \Omega_2 = (o, r)$$

$$A = \{oo, or, ro\},\ P(A) = \frac{3}{4} \qquad B = (o),\ P(B) = \frac{1}{2}$$

Wielu ankietowanych dawało odpowiedź, że Janek ma większą szansę uzyskania orła niż Józek ($P(A) > P(B)$). Inny typ błędnego rozwiązania polegał na wypisaniu możliwych wyników, $\Omega = \{ooo, oor, orr, oro, rro, rrr\}$, $A = \{ooo, oor, orr\}$ i obliczeniu prawdopodobieństwa wynoszącego $1/2$ (akurat to poprawny wynik).

Ćwiczenia

1. Dlaczego we wzorach na odchylenie standardowe z próby lub odchylenie standardowe populacji pojawia się pod pierwiastkiem suma kwadratów odchyleń poszczególnych danych od średniej arytmetycznej, a nie na przykład suma wartości bezwzględnych poszczególnych danych od średniej arytmetycznej?

2. Kiedy odchylenie standardowe jest równe 0?

   Wskazówka. Zastosuj indukcję matematyczną. Dla $n+1$ mamy ciąg równości:

$$x_1 = \frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{A + x_{n+1}}{n+1}, \ldots, x_{n+1} = \frac{A + x_{n+1}}{n+1}.$$

   Przekształcając ostatnią równość, otrzymujemy $x_{n+1} = A/n$. Wstawiamy to wyrażenie do pierwszej, drugiej, ..., przedostatniej z powyższych równości i otrzymujemy $x_1 = A/n, \ldots, x_n = A/n$. Możemy teraz skorzystać z założenia indukcyjnego dla liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Znajdź zależność między odchyleniem standardowym z próby a odchyleniem standardowym populacji.

4. Zaplanuj własne badanie statystyczne. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę, dolny kwartyl, górny kwartyl, odchylenie standardowe dla liczb otrzymanych w wyniku tego badania. Przedstaw wyniki badań w postaci graficznej (wśród tych przedstawień powinien być wykres pudełkowy).

5. Zaplanuj symulację (inną niż w doświadczeniu 3 ze s. 157) ilustrującą własność: częstość sumy zdarzeń rozłącznych jest równa sumie częstości tych zdarzeń.

6. Dlaczego oba rozwiązania zadania z przykładu 1 (s. 160–161) są niepoprawne? W jaki sposób można wyjaśnić istotę tych błędów uczniom? Zastanów się, dlaczego studenci tak masowo źle rozwiązali to zadanie. Podaj poprawne rozwiązanie.

7. Spójrz na matematyzację zadania Buffona (s. 158–159). Dlaczego wystarczy rozpatrywać tylko dwie proste: $y = 0$ oraz $y = 1$?